

Att begripa vad dom begriper

Joakim Samuelsson

Institutionen för beteendevetenskap och lärande (IBL),
Linköpings universitet

Att lära sig matematik innebär att man kommer i kontakt med en mängd olika matematiska begrepp. Genom att tillägna sig begreppen ges eleverna en större möjlighet att förstå matematiken som ska läras. Begreppen hjälper dom att begripa matematiken. Begreppen inom matematiken, liksom inom alla sammanhang har en stor betydelse för möjligheten att förstå och kunna samtala om det man är engagerad i.

Bakgrund

Alla vi som någon gång undervisat i matematik har säkert funderat över hur vi kan hjälpa våra elever att tillägna sig matematiska begrepp. I ett utvecklingsarbete bestämde sig lärarna i årskurs 1, 3 och 5, tillsammans med forskare för att fokusera på undervisning av begrepp i matematik. Utvecklingsarbetet genomfördes som ett aktionsforskningsprojekt (Skovsmose & Borba, 2004) tillsammans med forskare i matematikdidaktik. Aktionsforskning används ofta i pedagogiska sammanhang för att lösa ett pedagogiskt problem samt för att utveckla verksamheten. I detta projekt utnyttjades nedanstående aktionsforskningsmodell. Modellen illustrerar tre olika situationer som gruppen som forskar fokuserar på samt tre olika processer som genomförs i forskningen.

Figure 1.

Den nuvarande situationen är matematikklassrummet innan några stora förändringar har genomförts. Den eftersträlvade situationen är en önskad förändrad undervisningssituation där möjligheterna för elevers engagemang och lärande i matematik har ökat. Den arrangerade situationen är hur det "blev" i slutet av forskningsperioden.

De tre sidorna i modellen avspeglar olika processer för arbetet. Den första processen (1) går mellan Nuvarande situation och Eftersträlvad situation och kallas för *Matematikdidaktiskt föreställande*. Här resonerar lärare och forskare i den forskande gruppen om vissa aspekter i matematikundervisningen med ett mål att elever ska få fler möjligheter till engagemang och lärande. Basen för detta är tidigare forskning och utvecklingsarbeten. Den andra processen (2) går mellan Nuvarande situation och Arrangerad situation och kallas för *Praktiskt organiserande*. Här organiseras för den aktivitet som ska genomföras. Den tredje processen (3) går längs den tredje sidan på modellens triangel. Den kallas för *Utforskande resonemang*. Här strävar de som forskar tillsammans att så öppet som möjligt lära sig av det man ser i materialet utifrån det syfte man har med projektet.

Nuvarande och eftersträlvad situation

Lärarna med stöd av forskare inledde arbetet med att beskriva och analysera den *nuvarande situationen* avseende undervisning om begrepp i matematik. Detta resulterade i att lärarna upptäckte att alla tyckte det var svårt att undervisa om begrepp så att alla elever tillägnade sig begreppet. Vi beslutade därför att vi skulle försöka bli bättre på att undervisa om begrepp så att vi kunde nå fler elever.

Det matematikdidaktiska föreställandet (process 1) fokuserade på vad ett begrepp är, vad eleverna kan när de visar begreppslig kunskap samt vad forskningen säger om hur undervisning av begrepp kan bedrivas för att eleverna ska lära sig begreppet.

Ett begrepp består av tre delar (Johnsen Høines, 2000). Det är a) ett språkligt uttryck (begreppsuttryck, t.ex. triangel), b) ett begrepps innehåll (vad som t.ex. definierar en triangel rent matematisk och c) ett uttryck för något som existerar i omvärlden. Lärarnas diskussion tillsammans med forskarna resulterade i en slutsats att ett begrepp inte är något entydigt utan något mångfacetterat. Diskussionerna resulterade också i att lärargruppen konstaterade att en elev som har begreppslig kunskap kan utföra flera olika handlingar kopplade till ett begrepp.

Det kan handla om att eleven kan:

- Exemplifiera (ge och känna igen exempel, motivera val av exempel, ge eller känna igen motexempel, motivera val av motexempel)
- Klassificera (ange nödvändiga egenskaper, definiera begreppet)
- Extrahera (plocka ut väsentliga delar, t.ex. i en problemlösningssuppgift)
- Dra slutsatser av upprepade mönster
- Jämföra
- Förklara och troliggöra (Samuelsson, 2007).

När gruppen diskuterat vad ett begrepp är och hur eleven visar den kunskapen studerades vad forskningen skrev om HUR man kan undervisa om begrepp. En central roll i litteraturen om undervisning av matematiska begrepp har användningen av representationer (symboler, diagram, kartor, bilder, språk) (se t.ex. Heritage & Niemi, 2006). Många matematikdidaktiker menar att nästan allt kan användas för att representera något. Först måste lärare använda representationer för att engagera elever att förstå ett begrepp, därefter försöker elever använda dessa

representationer för att arbeta med det matematiska innehållet. Elevernas användning av representationerna kan då fungera som beslutsunderlag för läraren i den fortsatta planeringen av undervisningen (Greeno & Hall, 1997). Det finns studier som visar att goda kunskaper om hur man representerar ett matematiskt innehåll också påverkar problemlösningsförmågan, och förståelsen för avancerade begrepp (se t.ex. Pellegrino, Chudowsky, & Glaser, 2001). Niemi (1996) visar till exempel att elever som kan representera rationella tal med flera olika representationer lyckas bättre i arbetet med komplexa problem. En slutsats av ovanstående är att utnyttjande av olika representationer är nödvändigt för att eleverna ska tillägna sig ett begrepp.

Arrangerad situation

Med stöd av vår nyvunna kunskap om begrepp ville vi pröva våra kunskaper och organisera för lärande i praktiken (process 2). Varje årskurs valde ett begrepp som skulle bearbetas på lektionen.

- Årskurs 1: Udda och jämna tal.
- Årskurs 3: Bråk som del av helhet och del av antal.
- Årskurs 5: Vinklar.

Därefter planerades en lektion. Före och efter varje lektion gjordes ett test för att kunna analysera vad eleverna lärt sig under lektionen. När hela processen var genomförd diskuterade forskningsgruppen vad som hade skett och vilka slutsatser de kunde dra. Därefter genomfördes samma process igen. Nedan presenteras lektionen som genomfördes i varje årskurs samt resultat på för- och eftertest.

Åk 1 (Udda och jämna tal)

Lektionen inleddes med att lärarna resonerade om vad ett jämnt och ett udda tal var för något. De fokuserade i denna aktivitet på att Jämna – delas jämnt ut. Udda – delas inte jämnt ut, samt hur man vet att tal kan delas jämnt. Läraren visade att ett jämnt tal alltid kan delas jämnt med 2. Därefter fick eleverna öva på att dela upp olika tal i två delar med stöd av kulor. Först delade eleverna upp kulor inom talområdet 0 – 9 och därefter inom talområdet 11 – 20 med 2. Slutsatserna av denna laborativa övning blev: a) Siffrorna 0, 2, 4, 6, 8 är jämna, b) Siffrorna 1, 3, 5, 7, 9 är udda, c) Tal som slutar med 0, 2, 4, 6, 8 är alltid jämna tal, d) Tal som slutar med 1, 3, 5, 7, 9 är alltid udda tal, e) Det är entalssiffran som bestämmer om talet är jämnt eller udda. Eleverna fick sedan nämna egna tal som klassen kontrollerade tillsammans om talet är udda eller jämnt. Avslutningsvis fick eleverna arbeta med ett arbetsblad där de skulle färglägga fält som hade olika siffror.

På för- och eftertest skulle eleverna identifiera udda och jämna tal. Eleverna blev bättre på att känna igen exempel på udda och jämna tal. De testades inte på att ge egna exempel så vi kan inte säga om de blev bättre på det.

Åk 3 (Bråk som del av helhet och del av antal)

Undervisningen fokuserade på att utveckla elevernas kunskap om bråk som a) del av helhet, b) del av antal och c) bråk som tal. Läraren inledde med en genomgång där de olika aspekterna av bråk exemplifierades. Exempelen användes för att eleverna skulle känna igen de olika sätten att representera bråk. Lärarna gav flera exempel på del av helhet. Det ena exemplet var en bild med tre rutor där 1/3 av rutorna var färglagda. Det andra exemplet var en bild med nio rutor där 1/3 av rutorna var färglagda. Eleverna gavs då en möjlighet att känna igen 1/3 i olika matematiska kontexter.

Lärarna visade även exempel där bråken varierades men helheten var densamma. Exempelvis att färglägga 1/3 av tolv rutor och färglägga 1/4 av tolv rutor. Eleverna fick då en chans att öva på att exemplifiera bråk. En annan övning handlade om att placera ut bråktal på en tallinje. Detta uppfattades som svårt av eleverna vilket ledde till att läraren hade en genomgång av

övningsuppgifterna som handlade om att placera bråktal på tallinjen.

Resultatet på för- och eftertest visade att eleverna blev bättre på det som undervisningen fokuserade på nämligen att ange bråk som del av helhet. I testen förekom även uppgifter där eleverna skulle ange del av antal och att de skulle tala om hur många $\frac{1}{3}$ av nio är. I testen fanns även uppgifter där de skulle placera ut tal på en tallinje vilket också visade sig svårt för eleverna.

Åk 5 (Vinklar)

I åk 5 (två klasser) undervisade lärarna om vinklar, a) räta, b) trubbiga och c) spetsiga. Undervisningen bestod av att läraren visade bilder på de olika vinklarna och berättade vad som kännetecknar dem olika vinklarna. Efter genomgången fick eleverna i en klass öva vid datorn i ett program där uppgiften var att känna igen vinklar. Vinklarna presenterades på olika sätt vilket innebar att det skapades kontraster som gjorde att eleverna hade en möjlighet att generalisera kännetecknen för dessa vinklar. Detta skedde genom att exempelvis räta vinklar presenterades med olika vridning i förhållande till varandra. I den andra klassen övade eleverna på att rita vinklar och att sätta ut namn på vinklar. De vinklar som var ritade presenterades på ett och samma sätt.

I för- och eftertest för åk 5 prövades eleverna dels på att känna igen olika typer av vinklar, dels på att ge exempel på olika typer av vinklar. Resultatet visade att den gruppen som arbetat vid datorn och blivit presenterade för vinklar som var vridna på olika sätt utvecklades bättre med avseende på sin förmåga att känna igen olika typer av vinklar. Gruppen som hade ägnat sig åt att namnge och rita vinklar utvecklades bättre avseende förmågan att ge exempel.

Utforskande samtal

Resultaten från våra lektioner visar dels hur viktigt det är att läraren vet vad de riktar uppmärksamheten mot när de undervisar, dels vad de bedömer när de bedömer matematisk kunskap. En så relativt enkel sak som att eleverna övar sig på att ge exempel eller övar sig på att känna igen exempel påverkar vilken aspekt av begrepp som eleverna behärskar. Om man som lärare riktar uppmärksamheten mot att ge exempel och sen ber eleverna känna igen exempel så kan läraren få uppfattningen att eleverna inte behärskar begreppet trots att eleverna behärskar en aspekt av begreppet.

En utgångspunkt till detta samarbete var att lärarna på skolan ville bli bättre på att undervisa om bråk. Om de faktiskt blev bättre är svårt att avgöra, däremot är de nu mer medvetna om vilka nyanser som bör uppmärksammas i undervisningen om begrepp, vilket borde leda till en mer kvalificerad undervisning.

Referenser

1. Greeno, J. G., Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 78 (5), 361-367.
2. Heritage, M., & Niemi, D. (2006). Toward a framework for using student mathematical representations as formative assessments. *Educational Assessment*, 11, 265-282
3. Johnsen Høines, M. (2000). Matematik som språk. Stockholm: Liber
4. Pellegrino, J.W., Chudowsky, N. & Glaser, R. (Eds.) (2001) *Knowing what Students*
5. *Know: The science and design of educational assessment*. Washington,
6. D.C.: National Academy Press.
7. Pellegrino, J.W., Chudowsky, N. & Glaser, R. (Eds.) (2001) *Knowing what Students*
8. *Know: The science and design of educational assessment*. Washington,
9. D.C.: National Academy Press.
10. Pellegrino, J.W., Chudowsky, N. & Glaser, R. (Eds.) (2001) *Knowing what Students*
11. *Know: The science and design of educational assessment*. Washington,

12. D.C.: National Academy Press.
13. Niemi, D. (1996). A fraction is not a piece of pie: Assessing exceptional performance and deep understanding in elementary school mathematics. *Gifted Child Quarterly*, 40(2), 70-80
14. Pellegrino, J. W., Chudowsky, N., & Glaser, R. (2001). *Knowing what students know: The science and design of educational assessment*. Washington, DC: National Academies Press
15. Samuelsson, J. (2007). Att begripa vad de begriper. I A. Engström, M. Engvall och J. Samuelsson (red). *Att leda den tidiga matematikundervisningen* (s 107-125). Linköping: Skapande vetande.
16. Skovsmose, O., & Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. I P. Valero & R. Zevenbergen (Red.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (s. 207-226). Springer